

新竹市 113 學年度國中數學能力競賽

數學達人賽【題本】

請不要翻開次頁！

***請讀完本頁說明，鐘響時才可以開始作答！**

***請先確定您的答案卷與桌面上的貼紙考試編號是否一致無誤。**

※測驗作答說明：

測驗說明：

- 1、此份題本為國中數學能力競賽數學達人賽題本，雙面列印，第一部分為填充題，共 10 題，第二部分為計算證明題，共 2 題，總計 12 題，測驗時間為 9:30 到 10:30，共 60 分鐘。
- 2、填充題答案卷及計算證明題答案卷請確認**考試編號及姓名是否正確**。
- 3、請用**黑筆**作答，用鉛筆作答一律不計分，填充題每題 7 分，小計 70 分，計算證明題每題 15 分，小計 30 分，總得分 100 分。

注意事項：

- 1、(1)競賽鈴聲響時開始作答，**未響前不准動筆，並不得翻閱試題卷**；
鈴聲結束時，請停止作答，繼續作答者，該項成績以 0 分計算。
(2)測驗時請將個人手機、電子穿戴設備及鬧鈴器具關閉，並放置於個人手提袋內，不可拿出來使用。
(3)使用黑筆填答；考生可攜帶三角板、直尺、圓規，但不得攜帶量角器或附量角器功能之文具。
(4)測驗競賽完畢，考生不可帶走題目卷。
- 2、如有下述違規事件，經監考人員填寫於試場違規紀錄表，並經考生簽名確認後，該項成績扣 10 分計算，累計扣分至該項比賽 0 分為限：
 - a. 測驗期間個人手機、電子穿戴設備及鬧鈴器具聲響。
 - b. 競賽期間口語交談或言行有異。
 - c. 使用計算機、其他輔助工具或翻閱任何書籍。
 - d. 競賽開始鈴響前動筆，或翻閱試題卷、答案卷。
 - e. 其他由監考人員認定之違規舉動。以下情節者，以 0 分計算：
 - a. 鈴聲結束停止作答後，繼續作答者，該項成績以 0 分計算。
 - b. 未使用黑筆填答，該張答案卷以 0 分計算。

新竹市113學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 【試題卷】

- 備註：1. 第一部分為填充題，每題7分，只須填答案，請將答案填入答案卷正確格子內。
2. 根據各題題目中所規定的形式寫出正確答案，並將答案化成最簡分數或最簡根式。
3. 第二部分為計算證明題，每題15分，須在答案卷上寫出作答歷程與註明答案。
4. 「第一部分」和「第二部分」作答時間合計60 分鐘。請用黑色原子筆作答。

【第一部分】

1. 有甲、乙、丙三瓶純酒精的容器，均為 100ml，第一次由甲取出 10ml，然後加入 10ml 的水；由乙取出 20ml，然後加入 20ml 的水；由丙取出 30ml，然後加入 30ml 的水；第二次再由甲取出 30ml，然後加入 30ml 的水；由乙取出 20ml，然後加入 20ml 的水；由丙取出 10ml，然後加入 10ml 的水；則最後甲、乙、丙三瓶的濃度大小關係_____【三者關係須完全正確才有分數】

2. 小翰寫出所有滿足下列條件的四位數：

條件一：每個數的千位數字、百位數字、十位數字與個位數字恰為各出現「兩」次的相異數字 A、B。

條件二：A、B 只可為 1~7 的相異正整數，(不可為 0、8、9)

例如：四位數可以為 4334、2266、7171，但不會出現 1100(數字不可為 0)、3333(數字不可全相同)、8228(數字不可為 8)

若小翰寫出的四位數中，5 的倍數有 m 個、11 的倍數有 n 個，
則數對(m, n)=(____, ____)。

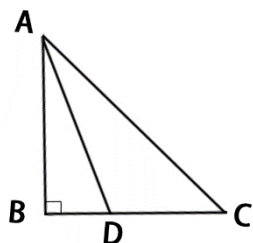
3. 設 x, y, z 皆為小於 1 的正數，且 $k = x + y(1 - x) + z(1 - x)(1 - y)$ ，請因式分解 $1 - k =$ _____。

4. 若 $(3 + 2\sqrt{2})^{2024} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)^k$ ，則 k 值為_____。

補充 $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$

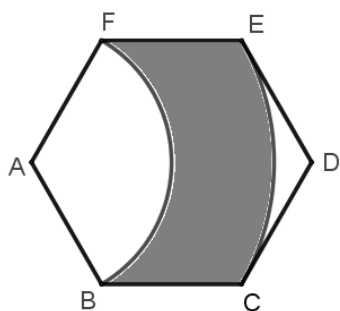
5. 已知正方形的對角線恰與長方形的對角線等長，正方形的邊長為 $3x + 5$ ，長方形的長與寬分別為 $5x + 1$ 與 $4x + 3$ ，則 x 之值為_____。

6. 如圖(一)，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 是直角， $\angle C$ 等於 $\angle DAB$ 的2倍，且D點在 $\overline{BC}$ 上。已知 $\overline{AC} = 13$ 、 $\overline{BD} = 4$ ，則 $\overline{AB}$ 長為_____。



圖(一)

7. 如圖(二)，邊長為6的正六邊形 $ABCDEF$ ，以A為圓心，分別以 $\overline{AF}$ 、 $\overline{AE}$ 為半徑畫弧，則塗色部分面積為多少_____。



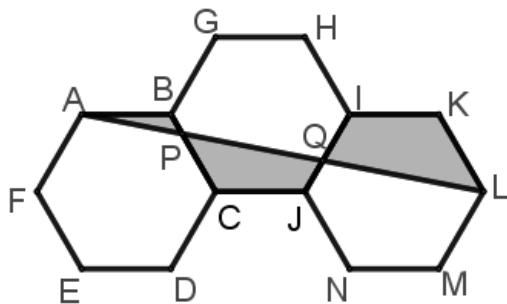
圖(二)

8. 已知 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 、 $\dots$ 為等差數列，曉華取其中四個數 a_2 、 a_4 、 a_{20} 、 a_n 剛好為等比數列，則 $n =$ _____。

9. 有一等差數列之首項 $a_1 = 11$ ，公差 d 為正整數，且數列之前40項滿足不等式

$$\frac{1}{a_1} < \frac{2}{a_2} < \frac{3}{a_3} < \dots < \frac{k}{a_k} < \dots < \frac{39}{a_{39}} < \frac{40}{a_{40}} < \frac{1}{2}, \text{ 則有 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 個 } d \text{ 滿足不等式條件。}$$

10. 如圖(三)，三個相鄰的正六邊形， $\overline{AB} = 2$ ，連接 $\overline{AL}$ 與中間的正六邊形交於P、Q兩點，則塗色部分面積為多少？_____。



圖(三)

新竹市113學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 【試題卷】

- 備註：1. 第一部分為填充題，每題7分，只須填答案，請將答案填入答案卷正確格子內。
2. 根據各題題目中所規定的形式寫出正確答案，並將答案化成最簡分數或最簡根式。
3. 第二部分為計算證明題，每題15分，須在答案卷上寫出作答歷程與註明答案。
4. 「第一部分」和「第二部分」作答時間合計60 分鐘。請用黑色原子筆作答。

【第二部分】

計算證明題，若是只有答案沒有過程將不予計分

【題組一】

1. 試計算下列各題

(1) 請比較 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的大小關係

(2) 請比較 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100}$ 和 $\frac{1}{10}$ 的大小關係。

【題組二】

2. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{BC} = 20$ ， $\overline{AC} = 22$ (單位：公尺)。有一隻土撥鼠從 $\overline{AB}$ 上任一點 D (異於 A 、 B 兩點) 開始行走，它的行徑路徑如下：先由 D 點沿平行 $\overline{BC}$ 的方向跑到 $\overline{AC}$ 上的 D_1 點；再沿平行 $\overline{AB}$ 的方向跑到 $\overline{BC}$ 上的 D_2 點；又立即改變方向，沿平行 $\overline{AC}$ 的方向跑到 $\overline{AB}$ 上的 D_3 點；又沿平行 $\overline{BC}$ 的方向繼續行走。依此規律一直行走下去，直到重新返回 D 點才停止。則：

(1) 試找出可回到 D 點的一種路徑？並說明為何

一定會回到 D 點？

(2) 列出所有可能的路徑長？

