

新竹市113學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 第二部分答案卷

考場： 編號： 姓名：

備註：1. 第二部分為計算證明題，須寫出作答歷程與註明答案。

2. 「第一部分」和「第二部分」作答時間合計 60 分鐘。請用黑筆作答。

第二部分作答區，每題最高 15 分

【題組一】

1. 試計算下列各題

(1) 請比較 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的大小關係

(2) 請比較 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100}$ 和 $\frac{1}{10}$ 的大小關係。

(1) 令 $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9}$

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \right) = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \frac{5}{6} < \frac{6}{7}, \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$$

$$AB = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3} \right)^2$$

又 $A < B$ ， $A < \frac{1}{3}$ ， $B > \frac{1}{3}$ 答： $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8} < \frac{1}{3}$

(2)

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{98}{99} \times \frac{100}{100} \right) = \left(\frac{1}{10} \right)^2$$

因為 $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ ， $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$ ， $\dots$ ， $\frac{97}{98} < \frac{98}{99}$ ， $\frac{99}{100} < \frac{100}{100}$ ，

即 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{98}{99} \times 1$ ，

故 $\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100} \right)^2 < \left(\frac{1}{10} \right)^2$ ，即 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

答： $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{97}{98} \times \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

新竹市113學年度國中數學能力競賽 數學達人賽 第二部分答案卷

考場： 編號： 姓名：

備註：1. 第二部分為計算證明題，須寫出作答歷程與註明答案。

2. 「第一部分」和「第二部分」作答時間合計 60 分鐘。請用黑筆作答。

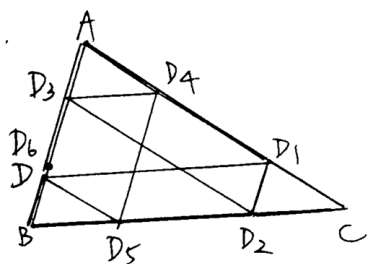
第二部分作答區，每題最高 15 分

【題組二】

如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{BC} = 20$ ， $\overline{AC} = 22$ (單位：公尺)。有一隻土撥鼠從 $\overline{AB}$ 上任一點 D (異於 A 、 B 兩點) 開始行走，它的行徑路徑如下：先由 D 點沿平行 $\overline{BC}$ 的方向跑到 $\overline{AC}$ 上的 D_1 點；再沿平行 $\overline{AB}$ 的方向跑到 $\overline{BC}$ 上的 D_2 點；又立即改變方向，沿平行 $\overline{AC}$ 的方向跑到 $\overline{AB}$ 上的 D_3 點；又沿平行 $\overline{BC}$ 的方向繼續行走。依此規律一直行走下去，直到重新返回 D 點才停止。則：

(1) 試找出可回到 D 點的一種路徑？並說明為何一定會回到 D 點？

(2) 列出所有可能的路徑長？



① 若 D 為 $\overline{AB}$ 中點 (特例)

$$\text{行走路徑} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{1}{2} \times (14 + 20 + 22) = 28 \text{ m}$$

② 若 D 不是 $\overline{AB}$ 中點，沒有返回 D 點，及至 D_6 點

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1C}} = \frac{\overline{BD_2}}{\overline{CD_2}} = \frac{\overline{BD_3}}{\overline{D_3A}} = \frac{\overline{CD_4}}{\overline{D_4A}} = \frac{\overline{CD_5}}{\overline{D_5B}} = \frac{\overline{AD_6}}{\overline{D_6B}}$$

$\because D, D_6$ 在 $\overline{AB}$ 上，又 $\overline{DD_1} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{D_6D_1} \parallel \overline{BC}$

$\therefore D$ 點與 D_6 重合

$$\Rightarrow \text{行走路徑全長} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 14 + 20 + 22 = 56 \text{ m}$$

情況一： D 為中點 路徑長 28 公尺

情況二： D 非中點 路徑長 56 公尺

